

Кабардинская аналемма III

Расчет меридиональной аналеммы *

Мищик Николай Александрович †

В своем доме, на даче или в городе на улице можно создать солнечный календарь – аналемму. Для этого надо с каким-то шагом, например, в 10 дней на протяжении всего года (!) в строго определенное время, например, в 12 часов поясного времени отмечать на горизонтальной поверхности положение тени какого либо предмета. А потом эти точки соединить плавной кривой.



Но в таком случае Вы будете пленником обстоятельств. Намного интереснее самому рассчитать положение аналеммы, а потом проверить и насладиться мощью своего разума. «Надо же, имею власть над Солнцем, и оно движется согласно законам». Предварительно изложим некоторые понятия. Экваториальные координаты Солнца определяются склонением и уравнением времени.

Склонение почти повторяется через 4 года, и для этого 4-летнего периода осредненное склонение с достаточной точностью ($\pm 0,1^\circ - 0,2^\circ$) можно рассчитать по следующей приближенной формуле:

$$\sin \delta = 0,3979 \cdot \sin(279,4 + 0,9856 \cdot N + 1,92 \cdot \sin(0,9856 \cdot N - 2)) \quad (1)$$

где N – порядковый номер дня, начиная с 1 января.

* Опубликована на www.sundials.ru 22 сентября 2007.

† к.т.н., доцент кафедры «Судовождение» Морской Государственной Академии г. Новороссийска

Если склонение получается положительным, то оно северное, а если отрицательное, то южное.

Приближенное значение уравнения времени также зависит от номера N дня в году и вычисляется по следующей формуле:

$$\eta = 7,7^M \cdot \sin(0^\circ, 986 \cdot (N - 4)) - 9,9^M \cdot \sin(1^\circ, 971 \cdot (N - 80)) \quad (2)$$

Как видно из коэффициентов, размерность уравнения времени выражена во временной мере. Если полученные минуты разделим на 4, то переведем в градусную меру.

Таблица 1:

Дата	$\delta(^\circ)$	$\eta(\text{мин})$	$\eta(^\circ)$	Дата	$\delta(^\circ)$	$\eta(\text{мин})$	$\eta(^\circ)$
01.01	-23,0	3,4	0,8	01.07	23,1	3,8	0,9
11.01	-21,8	7,8	1,9	11.07	22,1	5,4	1,4
21.01	-19,8	11,2	2,8	23.07	20,0	6,5	1,6
01.02	-17,0	13,5	3,4	01.08	17,9	6,3	1,6
11.02	-13,9	14,2	3,6	11.08	15,2	5,2	1,3
20.02	-10,8	13,8	3,4	23.08	11,3	2,7	0,7
01.03	-7,5	12,4	3,1	01.09	8,2	0	0
11.03	-3,6	10,1	2,5	11.09	4,4	-3,2	-0,8
21.03	0	7,3	1,8	23.06	0	-7,5	-1,9
01.04	4,7	4,0	1,0	01.10	-3,3	-10,2	-2,6
11.04	8,4	1,1	0,3	11.10	-7,1	-13,2	-3,3
21.04	12,0	-1,2	-0,3	23.10	-11,5	-15,6	-3,9
01.05	15,2	-2,4	-0,6	01.11	-14,5	-16,4	-4,1
11.05	18,0	-3,7	-0,9	11.11	-17,5	-16,0	-4,0
22.05	20,5	-3,4	-0,8	22.11	-20,2	-13,9	-3,5
01.06	22,1	-2,3	-0,6	01.12	-21,8	-11,1	-2,8
11.06	23,1	-0,5	-0,1	11.12	-23,0	-6,9	-1,7
22.06	23,4	1,9	0,5	22.12	-23,4	-1,6	-0,4

Первое слагаемое учитывает неравномерность движения Земли по орбите (4 – порядковый номер дня прохождения перигелия, соответствующего примерно 4 января), второе – проекция на экватор движения Солнца по эллиптике (множитель $0^\circ, 986$ удвоен, поскольку период составляет полгода, а 80 – номер дня весеннего равноденствия).

Уравнение времени устанавливает взаимосвязь между истинным и средним временем. При помощи уравнения времени можно решать следующие задачи:

- Получение часового угла Солнца по известному времени:

$$t = T \pm 12^H(180^\circ) - \eta \quad (3)$$

- Получение времени кульминации Солнца. Для верхней кульминации $t = 0$, поэтому из последней формулы имеем:

$$T_{\text{в.к.}} = 12^H + \eta \quad (4)$$

Чтобы не заставлять считать эти исходные данные, приведем значения склонения Солнца и уравнения времени в табличном виде:

Договоримся, что горизонтальную аналемму будем рассчитывать на полдень, когда среднее Солнце будет приходить на меридиан наблюдателя. Высоту и азимут Солнца вычисляем по следующим формулам:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t \quad (5)$$

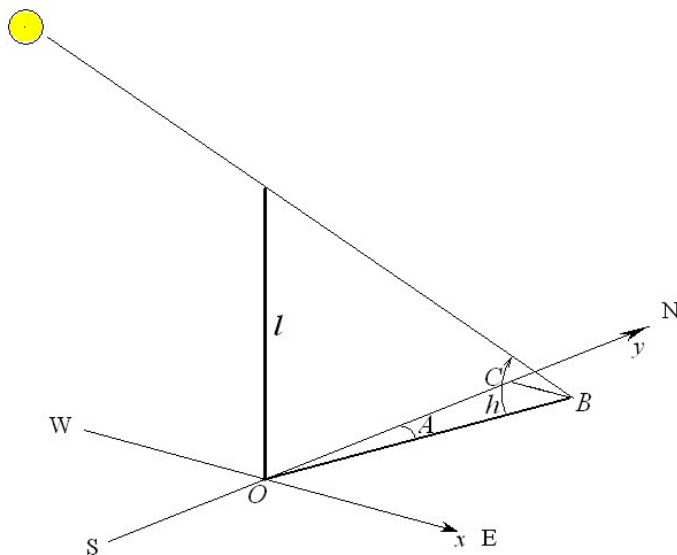
$$\sin A = \frac{\cos \delta \cdot \sin t}{\cos h} \quad (6)$$

Мы будем рассчитывать азимут истинного Солнца на момент кульминации среднего Солнца. В этом случае часовой угол истинного Солнца численно будет равен уравнению времени. Кульминация Солнца в нашей стране происходит всегда над точкой юга (S), поэтому азимут будет отсчитываться от точки S в сторону востока (E) или запада (W). Последняя формула удобна своей простотой. Из Таблицы 1 видно, что максимальное значение уравнения времени не превосходит $4,1^\circ$, а т.к. синус малого угла равен самому углу в радианной форме, то после преобразования получим упрощенную формулу:

$$A^\circ \approx \cos \delta \cdot \sec h \cdot \eta^\circ \quad (7)$$

Азимут тени будет отличаться от азимута Солнца на 180° , т.е. мы его будем вычислять по последней формуле, но он будет откладываться от точки севера (N).

Обозначим высоту гномона (вертикального шеста) через l .



Из чертежа видно, что длина тени будет определяться выражением:

$$OB = \frac{l}{\operatorname{tg} h}$$

Для нанесения аналеммы, необходимо рассчитать ее координаты. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с гномоном, ось ox направлена в сторону востока (E), а ось oy совпадает с полуденной линией и направлена в сторону севера (N). Тогда из прямоугольного треугольника ОВС имеем:

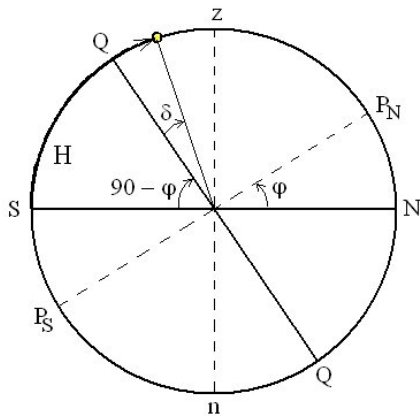
$$x = \frac{l}{\operatorname{tg} h} \cdot \sin A$$

Т.к. азимут будет мал, то $\sin A \approx A(\text{рад})$. Разделив градусы азимута на 57,3, переведем его в радианную меру. Тогда, подставляя (7) в последнюю формулу, имеем:

$$x = \frac{l \cdot \cos \delta \cdot \eta}{57,3 \cdot \operatorname{tg} h \cdot \cos h} = \frac{l \cdot \cos \delta \cdot \eta}{57,3 \cdot \sin h} \quad (8)$$

$$y = \frac{l \cdot \cos A}{\operatorname{tg} h} \quad (9)$$

Сделаем еще одно упрощение. В момент кульминации в течение нескольких минут высота светила изменяется незначительно, поэтому близмеридианальную высоту h можно считать равной меридиональной H .



Из чертежа небесной сферы, спроецированной на меридиан наблюдателя, имеем

$$H = 90 - \varphi + \delta$$

или

$$H = 90 - (\varphi - \delta)$$

Тогда формулы (7), (8) и (9) после преобразований окончательно примут следующий вид:

$$A = \frac{\cos \delta \cdot \eta}{\sin (\varphi - \delta)} \quad (10)$$

$$x = \frac{l \cdot \cos \delta \cdot \eta}{57,3 \cdot \cos (\varphi - \delta)} \quad (11)$$

$$y = l \cdot \operatorname{tg} (\varphi - \delta) \cdot \cos A \quad (12)$$

Выполним расчеты, чтобы у читателя были контрольные цифры. Для конкретного примера возьмем город Новороссийск. Его географические координаты:

$$\text{Широта} - \varphi = 44^{\circ}42'N;$$

$$\text{Долгота} - \lambda = 37^{\circ}45'E.$$

Заметим, что долгота почти совпадает с долготой Москвы, поэтому первоначальные расчеты очень будут полезны для московского региона.

Предположим, что разметку аналеммы мы собираемся выполнить 1-го октября, а на подготовленной площадке уже установлен отвесно гномон высотой $l = 2$ метра. В первую очередь надо через гномон провести полуденную линию. Если в полдень этого дня будет солнечно, то Солнце нам поможет.

Вычисляем время кульминации Солнца. В 12 часов местного времени кульминирует только среднее Солнце – фиктивная точка, которая равномерно движется по небесному экватору и задает нам среднее время. Из таблицы 1 на дату 1 октября выбираем уравнение времени $\eta = -10,2$ м. Знак “-” означает, что истинное Солнце отстает от среднего Солнца. Далее расчеты выполняем по следующей схеме:

	T	12 ^ч 00 ^м	Местное время кульминации среднего солнца.
	η	-10 ^м	Прибавляем со своим знаком
-	T _м	11 ^ч 50 ^м	Местное время кульминации среднего солнца.
	λ_E	2 ^ч 31 ^м	Отнимем восточную долготу в часовой мере*.
+	T _{гр}	9 ^ч 19 ^м	Гринвичское время, когда Солнце кульминирует у нас.
	N	4E	Прибавляем восточный номер пояса**.
	T _{пк}	13 ^ч 19 ^м	Получили поясное время кульминации Солнца.

Комментарий

* Долготу переводим в часовую меру, используя следующие соотношения: $15^{\circ} = 1^{\text{ч}}$; $1^{\circ} = 4^{\text{м}}$; $15' = 1^{\text{м}}$.

** Московское время – это время 4-го восточного пояса на период действия летнего времени: с последнего воскресенья марта по последнее воскресенье октября. В остальное время года московское время – это время третьего восточного пояса.

В поясное время 13^ч19^м тень от гномона нам даст направление полуденной линии. А если в этот момент нам помешает туча? Об этом придется рассказать в другой статье.

К этому же времени при помощи формул (10) – (11), склонения и уравнения времени из таблицы 1 рассчитываем координаты аналеммы, которые заносятся в таблицу 2.

NB (Note bene – очень важно). Если уравнение времени η положительно, то истинное Солнце в своем суточном движении отстает от среднего Солнца. Следовательно, его азимут будет SE, а азимут тени гномона противоположный, т.е. NW, и тень будет падать к западу от полуденной линии, поэтому знак координаты x будет отрицательный. А при отрицательном значении уравнения времени x будет положительный.

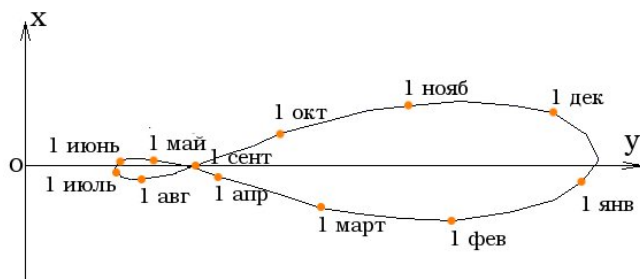
Относительно полуденной линии по рассчитанным координатам наносим точки аналеммы, маркируем и соединяем их кривой. Можно напротив соответствующих дуг кривой наносим знаки зодиакальных созвездий.

Заметим, что осенне-зимний участок горизонтальной аналеммы наиболее протяженный, т.е. в этот период можно более точно определить дату

Таблица 2:

Дата	$\varphi - \delta$ °	A °	y см	x см	Дата	$\varphi - \delta$ °	A °	y см	x см
01.01	67,7	0,8NW	488	-7	01.07	21,6	2,2NW	79	-3
11.01	66,5	1,9NW	460	-15	11.07	22,6	3,4NW	83	-5
21.01	64,5	2,9NW	419	-21	23.07	24,3	3,6NW	92	-6
01.02	61,7	3,7NW	371	-24	01.08	26,8	3,4NW	101	-6
11.02	58,6	4,1NW	327	-23	11.08	29,5	2,5NW	113	-5
20.02	55,5	4,1NW	290	-21	23.08	33,4	1,2NW	132	-3
01.03	52,2	3,9NW	257	-18	01.09	36,5	0	148	0
11.03	48,3	3,3NW	224	-13	11.09	40,3	1,2NE	170	4
21.03	44,7	2,6NW	198	-9	23.06	44,7	2,7NE	198	9
01.04	40,0	1,6NW	168	-5	01.10	48,0	3,5NE	222	14
11.04	36,3	0,5NW	147	-1	11.10	51,8	4,2NE	253	18
21.04	32,7	0,5NE	128	1	23.10	56,2	4,6NE	298	24
01.05	29,5	1,2NE	113	2	01.11	59,2	4,6NE	334	27
11.05	26,7	1,9NE	101	3	11.11	62,2	4,3NE	378	29
22.05	24,2	1,8NE	90	3	22.11	64,9	3,6NE	426	27
01.06	22,6	1,4NE	83	2	01.12	66,5	2,8NE	459	23
11.06	21,6	0,2NE	79	0	11.12	67,7	1,7NE	487	14
22.06	21,3	1,3NW	78	-2	22.12	68,1	0,4NE	498	3

по Солнцу. И при большей широте этот участок, как и вся аналемма будут еще длиннее. Но в этот период число солнечных дней меньше, чем в весенне-летний. Возникает противоречие между потенциальной точностью и метеоусловиями. А Вы еще скажете: «А если аналемма начертана на открытом воздухе, то при нашем российском климате она полгода будет под снегом».



Ответ: «Если в Вашем доме, в квартире есть окна, выходящие на юг с точностью $\pm 10^\circ$, то наносим на окно знак Солнца, а на полу наносим аналемму».

Вопрос: «Какой чудак у себя на полу будет рисовать аналемму?»

Ответ: «Тогда можно аналемму перенести на потолок. Но солнечный луч туда попадает, отразившись от зеркала, которое должно приклеено строго горизонтально к подоконнику. Расстояние от зеркала до потолка – это длина гномона, а вся изложенная математика остается в силе. Можно солнечный

зайчик отразить на вертикальную стенку.

И очень коротко о расчете вертикальной аналеммы для стены ориентированной строго на юг. Как узнать, что стена смотрит строго на юг? Предположим, Вы расположены на долготе $37^{\circ}45'E$, проверку делаете 1 октября, и к стене строго по нормали при помощи пластилина укреплен легкий деревянный штырь сантиметров 20. Если в момент кульминации в 13^h19^m тень будет строго вертикальной, то Вам повезло - стена строго ориентирована на юг.

Центр прямоугольной декартовой системы координат опять свяжем с точкой соединения гномона со стеной. Ось ox направим на восток, а ось oy - вертикально вниз. Тогда расчетные формулы примут вид.

$$x = \frac{l \cdot \cos \delta \cdot \eta}{57,3 \cdot \sin(\varphi - \delta)} \quad (13)$$

$$y = \frac{l}{\operatorname{tg}(\varphi - \delta)} \quad (14)$$

NB. Тень от гномона будет пересекать аналемму в полдень по среднему времени. Для долготы $\lambda = 37^{\circ}45'E$ это будет в

-	T	12 ^h 00 ^m
	λ_E	2 ^h 31 ^m
	$T_{гр}$	9 ^h 29 ^m
+	N	4E
	$T_{пк}$	13 ^h 29 ^m

по летнему времени и в 12^h29^m по зимнему времени.

Проверяйте.